Klausur GDV II, Herbst 2005

14. Juli 2005

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Fachbereich:

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Genehmigte Hilfsmittel: Schreib- und Zeichenwerkzeug, nicht programmierbarer Taschenrechner

Aufgabe	Thema	Erreichbare Punkte	Erreichte Punkte
1	Räumliche Datenstrukturen	7	
2	Parametrische Kurven und Flächen	29	
3	Approximation und Interpolation von Daten	20	
4	Implizite Kurven und Flächen	16	
5	Modellieren impliziter Funktionen	11	
6	Tesselierung von Impliziten Kurven	13	
7	Halbkanten-Datenstruktur für polygonale Netze	10	
8	Kompression von Dreiecksnetzen	16	
9	Topologie von Dreiecksnetzen	11	
10	Simplifizierung von Kurven/Dreiecksnetzen	19	
	Summe	**152**	

Marc Alexa, Anders Adamson, Andrew Nealen

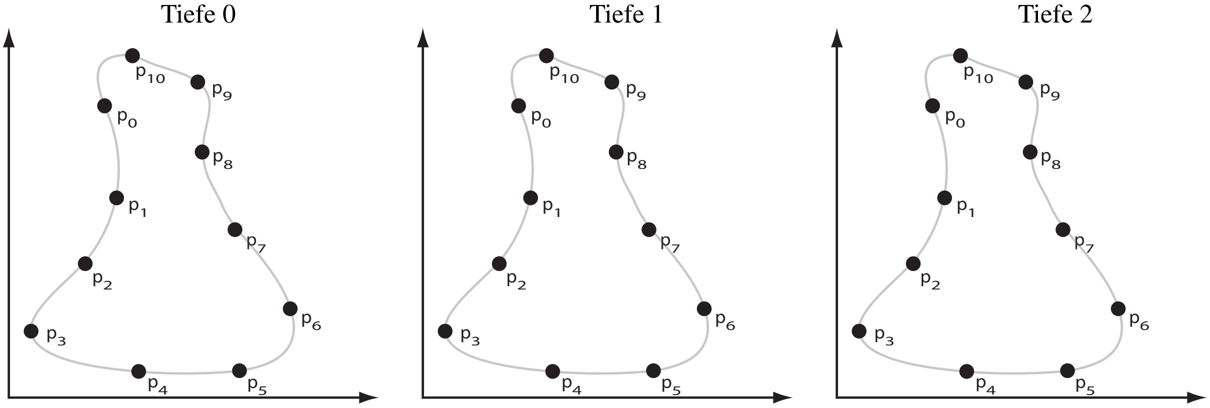
1 Räumliche Datenstrukturen (7 Punkte)

(a) (1 Punkt) Wie bestimmt man für eine Menge von Punkten $\mathbf{p}_i = \left(p_{i_x}, p_{i_y}\right), i \in \{1, ..., N\}$ den achsparallelen Hüllkörper?

(b) (2 Punkte) Welchen Vorteil hat es, wenn man bei der Konstruktion eines kd-Baums in jedem inneren Knoten einen achsparallelen Hüllkörper bestimmt und entlang der längsten Dimension geteilt wird? Geben Sie ein extremes Beispiel an, bei dem dieser Vorteil zur Geltung kommt.

(c) (i) (3 Punkte) Konstruieren Sie für die gegebene Punktmenge zeichnerisch einen kd-Baum, wobei in *jedem* Knoten ein achsparalleler Hüllkörper bestimmt wird. Wählen Sie eine Unterteilungsstrategie, die zu möglichst kleinen Zellen führt. Der Median wird jeweils der unteren Menge zugeordnet. Bei gerader Anzahl von Elementen ist der Untermedian ($x_{\frac{n}{2}}$) zu wählen. Unterteilt wird, bis in jedem Blattknoten maximal 3 Punkte enthalten sind.

Tiefe 0 Tiefe 1 Tiefe 2

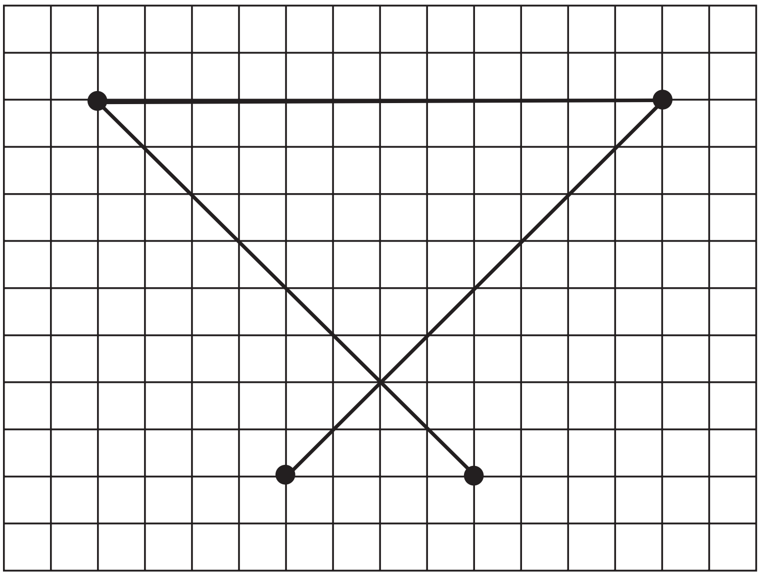


(ii) (1 Punkt) Geben Sie den zugehörigen Baum an. (In der Zeichnung sind die Knoten entsprechend zu beschriften!) Geben Sie in den Blattknoten die enthaltenen Punkte an.

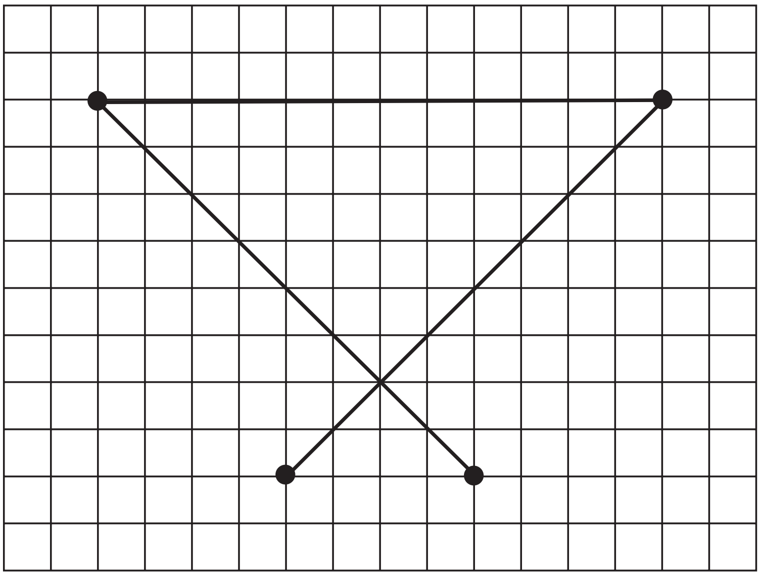
2 Parametrische Kurven und Flächen (29 Punkte)

2.1 Bézierkurven (11 Punkte)

(a) Das folgende Kotrollpolygon einer Bézierkurve sei über dem Intervall $[0, 1]$ parametrisiert. Bestimmen sie graphisch mit dem de Casteljau-Algorithmus den Punkt an der Stelle $0,5$ (3 Punkte).



(b) Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve. (3 Punkte)



(c) Ist die Kurve parametrisch stetig? Ist die Kurve geometrisch stetig? (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie: Jede reguläre parametrische Polynomkurve 2. Grades ist einfach, d.h. sich nicht selbst schneidet (3 Punkte).

2.2 Basen für Kurven (10 Punkte)

Im folgenden werden parametrische Kurven betrachtet $p(t) = \sum_i \mathbf{p}_i B_i(t)$, die durch Kontrollpunkte $\{\mathbf{p}_i\}$ und eine Basis $\{B_i(t)\}$ beschrieben sind. Das Skalarprodukt zweier Basisfunktionen $B_i(t)$ und $B_j(t)$ über dem Intervall $[0,1]$ sei $\int_0^1 B_i(t)B_j(t)\,dt$

(a) Zeigen Sie: Die Kurve ist invariant gegenüber isotroper Skalierung (1 Punkt).

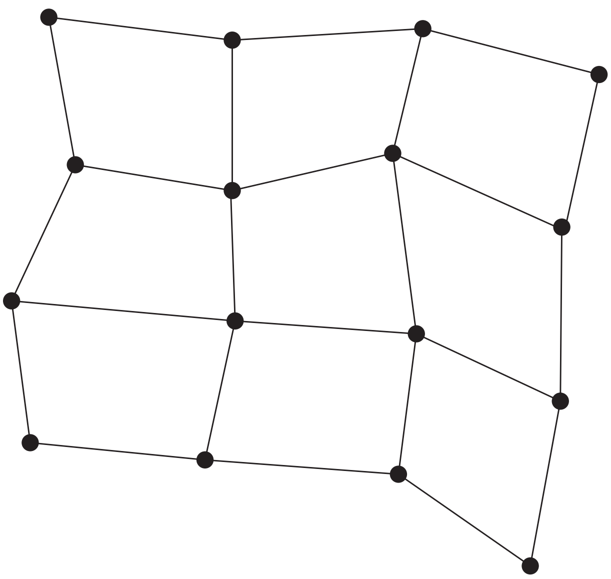
(b) Zeigen Sie: Eine translationsinvariante Basis teilt die Eins (3 Punkte).

(c) Ist die Bézierbasis orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort (2 Punkte).

(d) Entwickeln Sie eine orthogonale Basis mit der Eigenschaft, dass alle Kurvenpunkte in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte liegen (4 Punkte).

2.3 Tensorprodukte (8 Punkte)

(a) Skizzieren Sie wie aus dem Kontrollnetz eine über $[0,1]^2$ parametrisierte bi-kubische Bézier-Tensorproduktfläche mit dem de Casteljau Algorithmus an der Stelle $(1/6, 1/6)$ ausgewertet wird (2 Punkte).

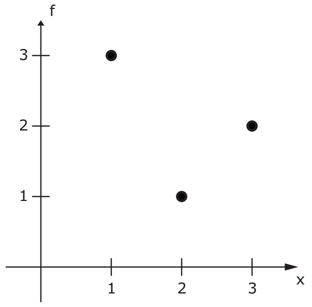


(b) Seien A_i und B_j Basen, die nicht die Eins teilen (also nicht affin invariant sind). Könnte ihr Tensorprodukt dennoch affin invariant sein? Begründen Sie Ihre Antwort (2 Punkte).

(c) Eine Tensorproduktbasis liefert auf natürliche Weise eine Basis für reguläre Vierecksgitter. Wie konstruiert man eine Basis für ein Dreiecksgitter? Schreiben sie die entsprechende Bézierbasis 1. Grades auf. (4 Punkte).

3 Approximation und Interpolation von Daten (20 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Daten (skalare Werte in einer Dimension)



x_i	f_i
1	3
2	1
3	2

Also $x_1 = 1, f_1 = 3, x_2 = 2, f_2 = 1$, etc. Nun sind Polynome $f(x) = \mathbf{b}(x)^T \mathbf{c}$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate (least squares) zu fitten. **Zur Erinnerung**: Um die unbekannten Koeffizienten des verwendeten Polynoms zu bestimmen muss man das folgende lineare Gleichungssystem lösen

$$\mathbf{c} = \left[\sum_i \mathbf{b}(x_i)\mathbf{b}(x_i)^T\right]^{-1} \sum_i \mathbf{b}(x_i) f_i, \tag{1}$$

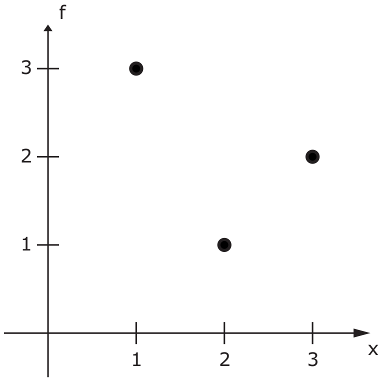
wobei $\mathbf{b}(x)$ die verwendete Polynombasis der Ordnung n ist (Basis 0er-Ordnung $\mathbf{b}(x) = [1]^T$, 1er-Ordnung $\mathbf{b}(x) = [1, x]^T$, 2er-Ordnung $\mathbf{b}(x) = [1, x, x^2]^T$, usw.) und $\mathbf{c} = [c_1, \ldots, c_k]^T$ der Vektor der unbekannten Koeffizienten ist (mit $k = n + 1$).

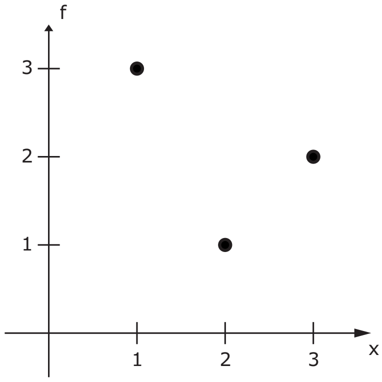
(a) (2 Punkte) Angenommen man verwendet ausschließlich die obigen drei (in der Tabelle angegebenen) Randbedingungen. Welche Ordnung N darf die verwendete Polynombasis höchstens haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

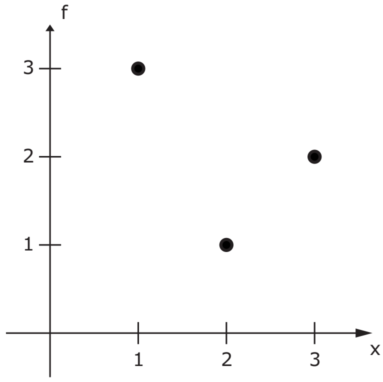
(b) (10 Punkte) Für die drei Polynombasen der Ordnung $n \leq 2$ sind die zugehörigen Koeffizienten des least squares Fits zu berechnen (Punkteverteilung: $n = 0$ gibt 2 Punkte. $n = 1$ gibt 3 Punkte. $n = 2$: Aufstellen des LGS gibt 3 Punkte, Lösen des LGS nochmal 2 Punkte)
Hilfe(n): Für $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gilt $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Für das Lösen von größeren linearen Gleichungssystemen kann z.B. Gauss-Jordan-Elimination verwendet werden.

(c) (2 Punkte) Welche der Funktionen aus Aufgabenteil (b) sind approximierend und welche sind interpolierend?

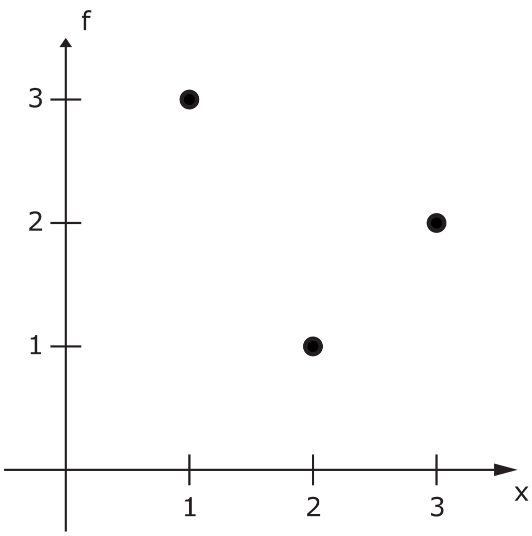
(d) (3 Punkte) Skizzieren Sie in den folgenden drei Diagrammen jeweils die in Aufgabenteil (b) berechnete Fit Funktion (im Intervall $[1,3]$) für die Polynombasis 0er-Ordnung ($n = 0$, links), 1er-Ordnung ($n = 1$, mitte) und 2er-Ordnung ($n = 2$, rechts). Kennzeichnen Sie dabei überall die Distanz-Fehler die im Quadrat minimiert werden. **Hinweis:** Wurde Aufgabenteil (b) nicht bearbeitet, kann die Fit Funktion *näherungsweise* skizziert werden.

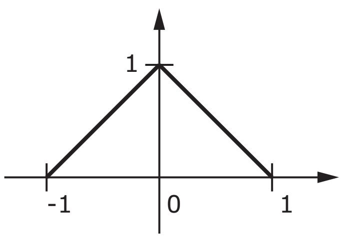






(e) (3 Punkte) Skizzieren Sie im linken Diagramm die MLS Fit Funktion im Intervall $[1,3]$ unter Verwendung der Polynombasis 0er-Ordnung ($n = 0$) und der im rechten Diagramm gegebenen Gewichtungsfunktion.





4 Implizite Kurven und Flächen (16 Punkte)

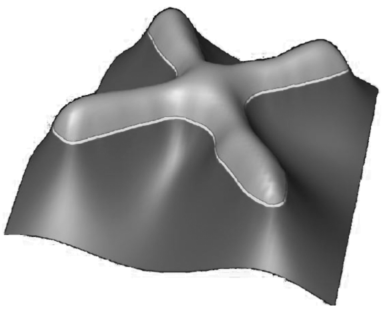
Hinweis: In Aufgaben die das Symbol ☐ enthalten sind zutreffende Aussagen anzukreuzen. Mehrfache Richtige sind dabei möglich.

(a) (1 Punkt) Eine implizite Funktion des $\mathbb{R}^d$ bildet

☐ den $\mathbb{R}^d$ auf einen Skalar ab.

☐ den Parameterraum auf $\mathbb{R}^d$ ab.

(b) (1 Punkt) Die Illustration stellt eine Funktion als Höhenfeld dar, die implizit



☐ einen Punkt

☐ eine Kurve

☐ eine Fläche

☐ ein Volumen

beschreibt.

(c) (2 Punkte) Die Normale einer impliziten Fläche $f = 0$ bestimmt man

☐ durch Bilden des Kreuzprodukts der Richtungsableitungen.

☐ im Nulldurchgang der Funktion.

☐ mittels des Gradienten der impliziten Funkion.

☐ in den Extrema der Funktion.

(d) (4 Punkte) Beschreibt $f = 0$ eine implizite Fläche, so sollten die folgenden Eigenschaften erfüllt sein:

(a) f ist stetig.

(b) Für alle $\mathbf{x}$ mit $f(\mathbf{x}) = 0$ gilt: $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

(c) $f^{-1}(0) \neq \emptyset$

(d) Es existieren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ mit $f(\mathbf{x}_0) < 0 \wedge f(\mathbf{x}_1) > 0$.

Erläutern Sie kurz die Bedeutung dieser Eigenschaften.

(e) (4 Punkte) Wie lautet der Schnitt zweier impliziter Funktionen g_0 und g_1? Wie lautet Ihre Vereinigung? Skizzieren Sie in 1D den jeweiligen Sachverhalt. (2 Diagramme!)

(f) (2 Punkte) Eine implizite Fläche, beschrieben durch die Funktion g, soll mittels einer Abbildung D transformiert werden.

- ☐ Hierfür muss g mit D verknüpft werden.
- ☐ Hierfür muss g mit D^{-1} verknüpft werden.
- ☐ An allen Stellen $D(\mathbf{x})$ muss die transformierte implizite Funktion die gleichen Werte liefern wie die ursprüngliche Funktion an den Stellen $\mathbf{x}$.
- ☐ An allen Stellen $\mathbf{x}$ muss die transformierte implizite Funktion die gleichen Werte liefern wie die ursprüngliche Funktion an den Stellen $D(\mathbf{x})$.

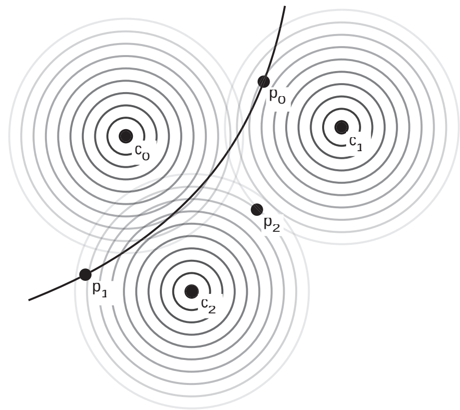
(g) (2 Punkte) Wie Transformiert man eine Quadrik K? Erläutern Sie dieses Vorgehen.

5 Modellieren impliziter Funktionen (11 Punkte)

(a) (1 Punkt) Bei der Bestimmung einer impliziten Funktion f aus abgetasteten Punktdaten $\mathbf{p}_i$ wird gefordert, dass $f(\mathbf{p}_i) = 0$. Weshalb werden weitere Nebenbedingungen benötigt?

(b) (5 Punkte) Die dargestellte Situation soll mittels Radialer Basisfunktionen (RBF) modelliert werden. Die Punkte $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ wurden von der Oberfläche eines Objekts abgetastet. Die Position $\mathbf{p}_2$ wurde nachträglich bestimmt. An den Stellen $\mathbf{c}_i$ werden Gaussfunktionen (Blobs) der Form $f_i(\mathbf{x}) = w_i e^{-||\mathbf{x}-\mathbf{c}_i||^2}$ platziert, wobei w_i der Skalierungsfaktor ist.

(i) (1 Punkt) Wie wird die implizite Funktion $f(\mathbf{x})$ ausgewertet?



(ii) (1 Punkt) Welche Unbekannten sind zu bestimmen?

(iii) (1 Punkt) Wie geht man dabei prinzipiell vor?

(iv) (2 Punkte) Wie lauten die zu erfüllenden Bedingungen?

(c) (1 Punkt) Welchen Wert nimmt bei der Methode der Gewichteten Kleinsten Fehlerquadrate (WLS oder auch MLS) ein konstantes Approxiomationspolynom an?

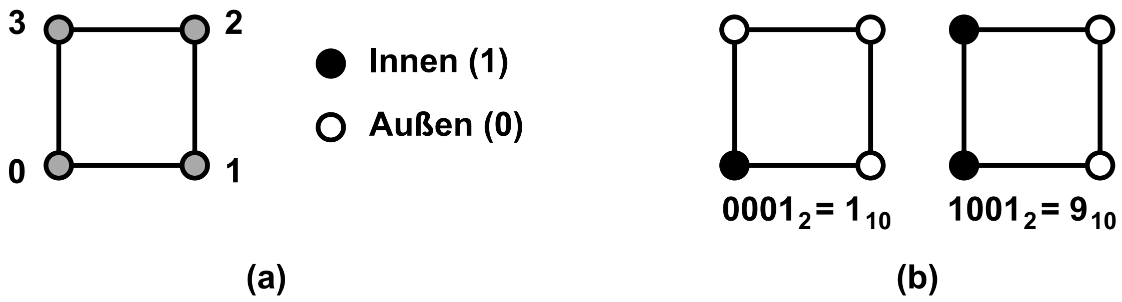
(d) (1 Punkt) Wie verändert sich ein trivariates lineares Polynom entlang einer Geraden im Raum?

(e) (1 Punkt) Unter welchen Umständen kann man den Wert einer impliziten Funktion direkt für das Sphere Tracing der entsprechenden Fläche verwenden?

(f) (2 Punkte) Im Allgemeinen kann man für eine implizite Fläche nicht erreichen, dass Ihre Funktion überall einen von Null verschiedenen Gradienten hat. Wieviele Punkte, mit dem Nullvektor als Gradienten, gibt es mindestens ?

6 Tesselierung von Impliziten Kurven (Marching Squares) (13 Punkte)

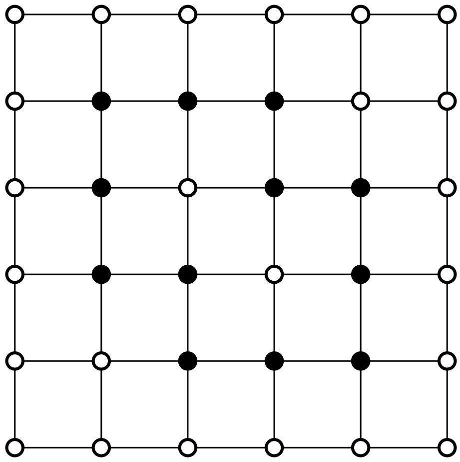
Gegeben sei (a) das quadratische Element mit Eckpunkt-Indizes (0-3) und Kennzeichnungen (schwarz, weiß) für innerhalb/außerhalb der (geschlossenen) impliziten Kurve, und (b) zwei mögliche Eckpunkt-Konstellationen (inkl. binär- und dezimal Code).

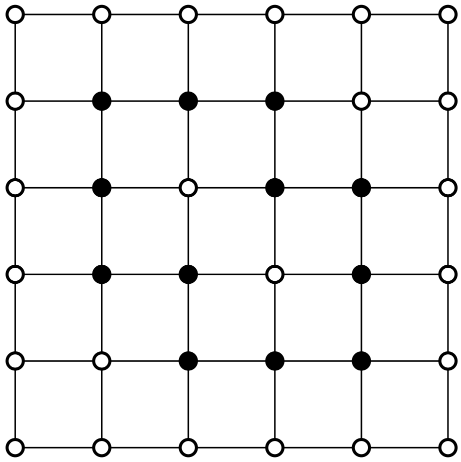


(a) (1 Punkt) Wie viele verschiedene Eckpunkt-Konstellationen $[1, \ldots, n]$ gibt es? (**Achtung:** Tesselierungen sind hier **nicht** gefragt, lediglich binäre Eckpunkt-Färbungen.)

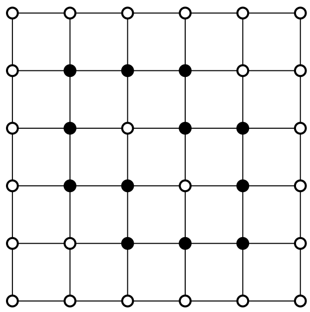
(b) (4 Punkte) Angenommen Tesselierungen die durch Rotationen um 90, 180 und 270 Grad aufeinander abgebildet werden können sind identisch. Wieviele unterschiedliche Tesselierungen gibt es? Zeichnen Sie diese, und ordnen Sie dabei jeder Tesselierung die zugehörigen dezimal-Codes der Eckpunkt-Konstellationen zu (so dass jede Eckpunkt-Konstellation genau *einer* Tesselierung zugeordnet ist).

(c) (4 Punkte) Gegeben sei das folgende 6×6 Gitter, auf dem die Innen/Außen Bedingungen abgetastet wurden. Zeichnen Sie die zwei möglichen Tesselierungen. Punkte der stückweise linearen impliziten Kurve schneiden dabei die Kanten des Gitters immer im Mittelpunkt.

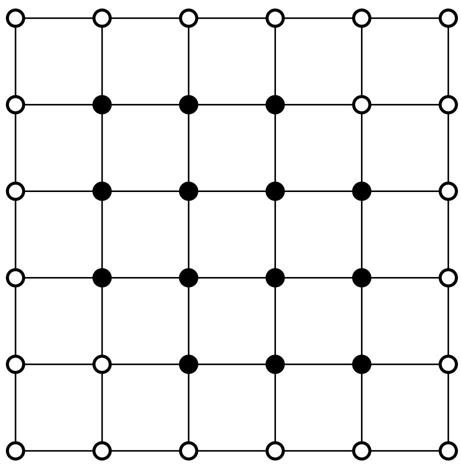




(d) (2 Punkte) Wie kann man diese Mehrdeutigkeit vermeiden? Erweitern Sie das folgende Gitter entsprechend.



(e) (2 Punkte) **Extended Marching Squares:** Zeichnen Sie die stückweise lineare implizite Kurve unter der Annahme, dass bei einer Normalenabweichung von ≥ 90 Grad ein zusätzlicher Punkt eingefügt wird.



7 Halbkanten-Datenstruktur für polygonale Netze (10 Punkte)

(a) Geben Sie das Weiler-Diagramm für die Halbkanten-Datenstruktur an. Gehen Sie davon aus, dass nur die nachfolgende Kante aber nicht die vorangehende Kante gespeichert wird. (3 Punkte).

(b) Beschreiben Sie, wie man ausgehend von einer Facette f alle Nachbarfacetten besucht (3 Punkte).

(c) Warum muss auch der Rand eines Polygonnetzes durch zwei gegenüberliegende Halbkanten dargestellt werden? Wie werden Randkanten im Netz dann identifiziert? (2 Punkte)

(d) Warum muss ein Polygonnetz orientierbar sein, um mit der Halbkanten-Datenstruktur dargestellt werden zu können (2 Punkte)?

8 Kompression von Dreiecksnetzen (16 Punkte)

8.1 Cut-Border-Algorithmus (8 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die “New Vertex” und die “Connect Forward” Operationen des Cut-Border-Algorithmus (2 Punkte).

(b) Zeigen Sie, dass in einem Dreiecksnetz ohne Rand asymptotisch jede zweite Operation “New Vertex” ist (3 Punkte).

(c) Warum können mit dem Cut-Border Algorithmus nur orienterbare Netze verarbeitet werden? (3 Punkte).

8.2 Valenz-Kodierung (8 Punkte)

Bitte achten Sie darauf, dass in Ihren Skizzen die Nachbarknoten um ein Pivot-Element gegen den Uhrzeigersinn bearbeitet werden.

(a) Skizzieren Sie Schritt für Schritt ein Dreiecksnetz, dass vollständig durch die Valenzreihe (3,3,4,4,3) beschrieben wird (5 Punkte).

(b) Warum kann das Drehen von Kanten (= edge-flip) in dem Dreiecksnetz den für die Valenzen benötigten Speicherbedarf verbessern? (1 Punkt).

(c) Warum ist die Valenzkodierung auch bei einem vollständig regulären Dreiecksnetz nicht ideal? (2 Punkte)

9 Topologie von Dreiecksnetzen (11 Punkte)

Im folgenden werden mannigfaltige, geschlossene Polygonnetze betrachtet (Achtung: Die Teilaufgaben verwenden teils Dreiecksnetze, teils allgemeine Polygonnetze). Das Netz hat v Knoten, e Kanten und f Dreiecke. Es gilt die Euler Formel $v - e + f = 2(1 - g)$, wobei g das Geschlecht der Fläche ist.

(a) Setzen Sie für ein Dreiecksnetz die Anzahl der Facetten (Dreiecke!) in Beziehung zu den Kanten (2 Punkte).

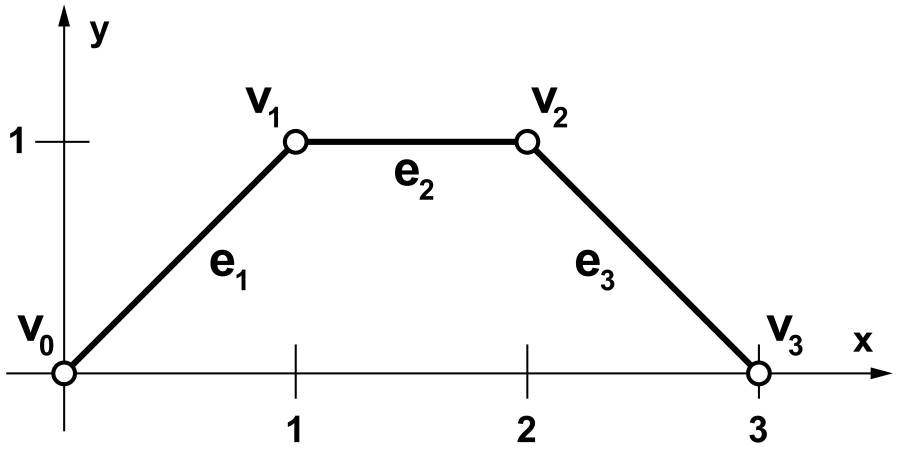
(b) Ein Dreiecksnetz besteht nur aus Knoten mit Grad 5. Wieviele Knoten hat das Netz? Leiten Sie Ihre Antwort bitte aus der Eulerformel ab. (4 Punkte).

(c) Zeigen Sie, dass das Entfernen einer Kante in einem allgemeinen Polygonnetz das Geschlecht nicht verändert (1 Punkt).

(d) Ein allgemeines Polygonnetz habe in jedem Knoten Grad 3. Was ist der durschnittliche Polygongrad (also die Anzahl der Kanten, die ein Polygon beranden)? Gehen Sie davon aus, dass das Geschlecht klein im Vergleich zur Anzahl der Knoten ist. (4 Punkte)

10 Simplifizierung von Kurven/Dreiecksnetzen (19 Punkte)

Gegeben sei die folgende, stückweise lineare Kurve, definiert durch die Knotenfolge $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.



Die Kurve ist im Folgenden mit der Methode der Fehlerquadriken zu vereinfachen. **Zur Erinnerung:** Der quadrierte Abstand eines Punktes $\mathbf{v}$ zu einer Geraden der Form $a_i\mathbf{x} + b_i\mathbf{y} + c_i = 0$ mit $a_i^2 + b_i^2 = 1$ ist gegeben durch $\mathbf{v}^T\mathbf{Q}_i\mathbf{v}$, wobei

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} a_i^2 & a_ib_i & a_ic_i \\ a_ib_i & b_i^2 & b_ic_i \\ a_ic_i & b_ic_i & c_i^2 \end{bmatrix}$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie für die Liniensegmente e_1, e_2 und e_3 jeweils die $\mathbf{Q}_i$ Matrix.

-

(b) (4 Punkte) Beschreiben Sie kurz und in eigenen Worten den Algorithmus zur Netz/Kurven-Vereinfachung mittels der Methode der Fehlerquadriken (inklusive der Initialisierung).

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Initialen Fehlerquadriken für die Knoten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

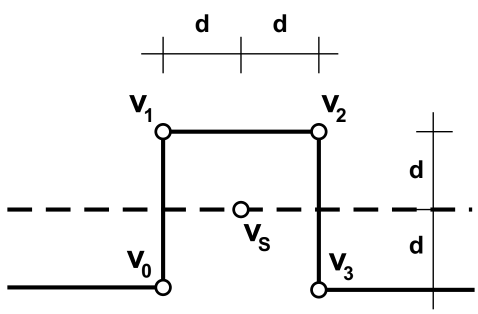
(d) (4 Punkte) Angenommen es stehen die drei folgenden Vereinfachungen zur Verfügung

- Kante e_2 kollabieren, dabei die Knoten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ im einen gemeinsamen Knoten $0.5\mathbf{v}_1 + 0.5\mathbf{v}_2$ zusammenziehen
- Kante e_1 kollabieren, dabei den Knoten $\mathbf{v}_1$ in den Knoten $\mathbf{v}_0$ ziehen
- Kante e_3 kollabieren, dabei den Knoten $\mathbf{v}_2$ in den Knoten $\mathbf{v}_3$ ziehen

welche Vereinfachung wählt die Methode der Fehlerquadriken zuerst? Verwenden Sie zur Berechnung der Fehler die Ergebnisse aus Aufgabenteil (c).

-

(e) (3 Punkte) Die Knoten $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ der dargestellten Kurve werden in den Gemeinsamen Knoten $\mathbf{v}_S$ kollabiert



Wenn für die initiale Kurve die Fehlerquadriken $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$ berechnet wurden, und $\mathbf{Q}_S = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{Q}_i$, wie gross ist der Fehler $\mathbf{v}_S^T \mathbf{Q}_S \mathbf{v}_S$? Begründen Sie Ihre Antwort. **Hinweis:** Eine explizite Berechnung ist nicht erforderlich.